

RYSZARD STELLER

Politechnika Wrocławska
Wydział Chemiczny
Zakład Inżynierii i Technologii Polimerów
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Przepływ uogólnionych cieczy newtonowskich w kanale ślimaka układu uplastyczniającego wylączarki

Streszczenie — Przedstawiono teoretyczną analizę izotermicznych, ustalonych i w pełni rozwiniętych przepływów uogólnionych cieczy newtonowskich w kanale ślimaka. Wykazano, że natężenie przepływu można opisać prostym wyrażeniem ogólnym słusznym dla każdej cieczy, przy czym parametry tego równania, które trzeba zwykle wyznaczać metodami numerycznymi, zależą od rodzaju cieczy. Z tego względu w odniesieniu do najważniejszego w praktyce równania cieczy potęgowej omówiono efektywne metody przybliżonego obliczania tych parametrów, co prowadzi do prostych równań wiążących natężenie przepływu zarówno jedno-, jak i dwukierunkowego z parametrami roboczymi procesu wylączania. Omówiono także możliwości zastosowania uzyskanych wyników do obliczeń charakterystyk przepływów nieizotermicznych w kanałach zakrzywionych o małej szerokości względnej z uwzględnieniem przepływu przeciekowego.

Słowa kluczowe: układ uplastyczniający wylączarki, przepływ w kanale ślimaka, uogólnione cieczy newtonowskie, równanie potęgowe, analiza teoretyczna, parametry robocze, przybliżone obliczanie natężenia przepływu.

FLOW OF GENERALIZED NEWTONIAN LIQUIDS IN SCREW CHANNEL OF EXTRUDER PLASTICATING SYSTEM

Summary — Theoretical analyses of isothermal, stationary and fully developed flows of generalized Newtonian liquids in a screw channel are presented (Fig. 1) in the paper. It is shown that the flow rate can be described by the simple general expression valid for every liquid. Parameters of this expression, which usually should be determined by numerical methods, depend on the type of liquid. Because of this, the effective methods of approximate calculations of these parameters are discussed for the most important practically equation of power law liquid. They lead to the simple equations describing connection of the rate of unidirectional or bidirectional flow and operation parameters of extrusion process (Fig. 2 and 3). Possible applications of the obtained results in the calculations of characteristics of non-isothermal flows in the curved channels of small relative widths and with existence of leakage flows were discussed as well.

Key words: extruder plasticating system, screw channel flow, generalized Newtonian liquids, power law equation, theoretical analysis, operation parameters, of approximate calculation of flow rate.

Powszechność występowania zjawiska przepływów ciekłych układów polimerowych w różnych urządzeniach przetwórczych i pomiarowych spowodowała, że stanowią one przedmiot wielu analiz teoretycznych i doświadczalnych, co znalazło odbicie w postaci licznych poświęconych tej tematyce artykułów, monografii i podręczników. Do najbardziej znanych zbiorczych opracowań zagranicznych należą np. pozycje [1–8]. Spośród prac opublikowanych przez autorów krajowych wymienić należy np. monografie lub podręczniki [9–11].

Wśród różnych rodzajów przepływów cieczy polimerowych bardzo ważną klasę stanowią przepływy w kanale ślimaka urządzeń służących do przetwarzania tworzyw polimerowych. Duże znaczenie teoretycznych i doświadczalnych prac nad modelowaniem takich prze-

pływów (por. np. [12, 13]) wynika z faktu, że uzyskane adekwatne modele ułatwiają projektowanie i optymalizację układów uplastyczniających wylączarek oraz wtryskarek ślimakowych, które są najszerzej stosowanymi w praktyce maszynami przetwórczymi.

Różne aspekty opisu przepływu w kanale ślimaka, uwzględniające nienewtonowskie właściwości cieczy polimerowej, izotermiczność i wymiarowość (liczbę składowych prędkości) przepływu, wpływ krzywizny i ścian bocznych kanału, istnienie przepływu przeciekowego oraz inne czynniki analizowano już w dużej liczbie opracowań zarówno obcych [1, 3, 5, 8, 14, 15], jak i krajowych. Do tych ostatnich należą wspomniane już pozycje [9–11], jak również artykuły [16–19], a także własne prace autora, np. cytowane w dalszej części tego artykułu.

Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że w odniesieniu do izotermicznego, rozwiniętego i ustalonego przepływu ciśnieniowo-włeczonego w kanale ślimaka istnieje prosty wzór opisujący natężenie przepływu wzdłuż osi kanału, który słuszny jest w przypadku jedno- lub dwukierunkowych przepływów dowolnej uogólnionej cieczy newtonowskiej. Ponadto, zaproponowano sposób przybliżonego obliczania parametrów tego wzoru dla ważnego w praktyce równania Ostwalda i deWaele (równania potęgowego), co umożliwi adekwatny opis przepływu bez stosowania metod numerycznych. Wspomniano także o możliwościach wykorzystania otrzymanych wyników do opisu przepływów nieizotermicznych w kanałach o skończonej szerokości bądź zakrzywionych przy użyciu efektywnych składowych prędkości i gradientu ciśnienia.

ZAŁOŻENIE I ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Zostanie rozpatrzony dwukierunkowy przepływ uogólnionej cieczy newtonowskiej o równaniu konstytutywnym:

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\gamma}_{ij} \quad (1)$$

gdzie: τ_{ij} oraz $\dot{\gamma}_{ij}$ — odpowiednio składowe tensora naprężenia i szybkości odkształcenia, μ — lepkość stanowiąca określoną funkcję drugiego niezmiennika jednego lub obu tensorów.

Dla ważnego w praktyce równania konstytutywnego cieczy potęgowej zależność lepkości od drugiego niezmiennika tensora szybkości odkształcenia określa wzór:

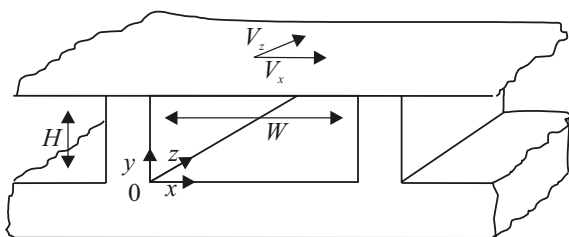
$$\mu(I_{\dot{\gamma}}) = m \left| \frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}} \right|^{\frac{n-1}{2}} \quad (1a)$$

gdzie: m oraz n — stałe materiałowe równania potęgowego.

Przy założeniu, że przepływ jest ustalony, w pełni rozwinięty i izotermiczny oraz zaniebaniu sił bezwładności i grawitacji a także przyjęciu modelu kanału płaskiego o małej wysokości H w porównaniu z jego szerokością W (rys. 1), składowe gradienty ciśnienia w kanale $\partial P/\partial x$ oraz $\partial P/\partial z$ stają się stałe, natomiast składowe prędkości v_x i v_z zależą jedynie od położenia y , przy czym spełnione są następujące warunki brzegowe:

$$v_x(0) = 0 \quad \text{i} \quad v_x(H) = V_x \quad (2a)$$

$$v_z(0) = 0 \quad \text{i} \quad v_z(H) = V_z \quad (2b)$$



Rys. 1. Geometryczna i kinematyczna charakterystyka przepływu

Fig. 1. Geometric and kinematic characteristics of flow

gdzie: V_x oraz V_z — składowe prędkości cylindra, przy czym (w procesie wytłaczania)

$$V_x = \pi DN \sin \varphi \quad (3a)$$

$$V_z = \pi DN \cos \varphi \quad (3b)$$

gdzie: D — średnica wewnętrzna cylindra, N — prędkość obrotowa ślimaka, φ — średni kąt wzniosu linii śrubowej ślimaka.

Scałkowane składowe x oraz z z równania ruchu dla uogólnionej cieczy newtonowskiej z uwzględnieniem przyjętych założeń przybierają postać:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y - y_x) \quad (4a)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (y - y_z) \quad (4b)$$

W równaniach (4a) i (4b) wartości y_x oraz y_z są odpowiednio zdefiniowanymi stałymi całkowania, których sens fizyczny jasno wynika ze struktury tych równań. Warunek $y = y_x$ lub $y = y_z$ określa bowiem zerowanie się odpowiednich pochodnych prędkości, co jest równocześnie warunkiem koniecznym istnienia maksimum składowych prędkości. Tym samym stałe te określają położenie teoretycznych maksimum obu składowych prędkości, które w ogólnym przypadku mogą leżeć poza obszarem kanału $0 \leq y \leq H$. Na przykład, dla czystego przepływu włeczonego o liniowym profilu prędkości $y_i = \pm \infty$.

W odniesieniu do dowolnych wartości lepkości μ — z wyjątkiem cieczy newtonowskiej ($\mu = \text{const}$) — funkcje (4a) i (4b) są zwykle niecałkowalne, tzn. składowe prędkości v_x i v_z spełniające warunki brzegowe (2a) i (2b) nie wyrażają się za pomocą funkcji elementarnych i można je wyznaczyć jedynie na drodze numerycznej. Dlatego też nie można analitycznie wyznaczyć jednostkowych natężeń przepływu q_x oraz q_z w kierunku prostopadłym i równoległym do osi kanału, określanymi odpowiednio wyrażeniami:

$$q_x = \int_0^H v_x dy = 0 \quad (5a)$$

$$q_z = \int_0^H v_z dy \quad (5b)$$

Zerowa wartość natężenia przepływu w kierunku x prostopadłym do osi kanału wynika z istnienia jego ścian bocznych, które powodują, że przepływ w tym kierunku może mieć charakter wyłącznie cyrkulacyjny, tzn. przepływ włeczony wywołany składową prędkością cylindra $V_x > 0$ jest całkowicie równoważony przeciwnie skierowanym przepływem ciśnieniowym o składowej gradientu ciśnienia $\partial P/\partial x > 0$.

Układ równań (2)—(5), mimo że został sformułowany ponad 40 lat temu [20], przez prawie 30 lat uchodził za nierozwiązalny na drodze analitycznej dla cieczy nie-newtonowskich. Istnienie rozwiązania analitycznego

dla cieczy potęgowej udało się wykazać w pracy [19], a następnie — dla cieczy Ellisa — w pracy [22]. W obu przypadkach natężenie przepływu wzdłuż osi kanału q_z wyraża się takim samym wzorem. Poniżej zostanie pokazane, że otrzymany w obu tych pracach wzór opisuje zachowanie dowolnej uogólnionej cieczy newtonowskiej i to nie tylko dla przepływu dwukierunkowego, lecz także w przypadku przepływu jednokierunkowego (wzdłuż osi kanału) jako przypadku granicznego dla $V_x \rightarrow 0$.

Bliższa analiza wskazuje, że omawiany problem można sformułować w nieco inny, lecz równoważny sposób. Uwzględniając warunki brzegowe (2a) i (2b) przy założeniu, że składowe prędkości v_x oraz v_z przedstawiają gładkie (tzn. ciągłe i różniczkowalne) funkcje, można napisać dwie oczywiste równości, które stanowią całkową postać warunków brzegowych:

$$\int_0^H \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = v_x(H) - v_x(0) = V_x \quad (6a)$$

$$\int_0^H \frac{\partial v_z}{\partial y} dy = v_z(H) - v_z(0) = V_z \quad (6b)$$

Ponadto, wyrażenia (5a) i (5b) można scałkować przez części także z użyciem warunków brzegowych (2a) i (2b), co prowadzi do zależności:

$$\int_0^H \frac{\partial v_x}{\partial y} y dy = HV_x \quad (7a)$$

$$\int_0^H \frac{\partial v_z}{\partial y} y dy = HV_z - q_z \quad (7b)$$

Po wprowadzeniu równań (4a) i (4b) do wzorów (6a), (6b), (7a) i (7b) otrzymuje się:

$$\int_0^H \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y - y_x) dy = V_x \quad (8a)$$

$$\int_0^H \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (y - y_z) dy = V_z \quad (8b)$$

$$\int_0^H \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y - y_x) y dy = HV_x \quad (8c)$$

$$\int_0^H \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (y - y_z) y dy = HV_z - q_z \quad (8d)$$

Tak właśnie formułując problem, łatwo można stwierdzić, że lewe strony równań (8a—d) spełniają następującą kombinację liniową:

$$(8a) \frac{\partial P}{\partial z} y_z - (8b) \frac{\partial P}{\partial x} y_x - (8c) \frac{\partial P}{\partial z} + (8d) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

Podobną kombinację muszą spełniać także prawe strony równań (8a—d). Prowadzi to do zaskakująco prostego wyrażenia na natężenie przepływu:

$$q_z = (H - y_x) V_z - (H - y_z) V_x \frac{\partial P / \partial z}{\partial P / \partial x} \quad (10)$$

Ponieważ wzór (10) został uzyskany bez jakiegokolwiek założenia odnośnie do postaci lepkości μ , tzn. do szczegółowej postaci równania konstytutywnego uogólnionej cieczy newtonowskiej, jest on słuszny dla każdej uogólnionej cieczy newtonowskiej. Od równania konstytutywnego zależą jedynie konkretne wartości y_x , y_z oraz $\partial P / \partial x$ (przy znanych wartościach V_x , V_z i $\partial P / \partial z$). Równanie (10) jest więc najbardziej ogólnym równaniem opisującym natężenie przepływu dwukierunkowego a także przepływu jednokierunkowego (jako przypadku granicznego dla $V_x \rightarrow 0$) dowolnych uogólnionych cieczy newtonowskich. Dla przepływu jednokierunkowego we wzorach (8a—d) należy przyjąć:

$$V_x = 0 \text{ oraz } \partial P / \partial x = 0, \text{ lecz } V_x / (\partial P / \partial x) \neq 0 \quad (11)$$

ROZWIĄZANIE DLA RÓWNIANIA POTĘGOWEGO

Poniżej zostanie szczegółowo przeanalizowany wariant, gdy lepkość w równaniach (8a—d) jest opisywana równaniem potęgowym (1a), które dla przepływu dwukierunkowego sprowadza się do wyrażenia:

$$\frac{1}{\mu} = m^{-\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 (y - y_x)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 (y - y_z)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \quad (12)$$

Dalsze rozumowanie najłatwiej w sposób przejrzysty prowadzić stosując następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\eta = \frac{y}{H} \quad (13a)$$

$$\eta_x = \frac{y_x}{H} \quad (13b)$$

$$\eta_z = \frac{y_z}{H} \quad (13c)$$

$$\chi = \frac{\partial P / \partial x}{\partial P / \partial z} \quad (13d)$$

$$V = H \left(\left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \frac{H}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (13e)$$

$$U_x = \frac{V_x}{V} \quad (13f)$$

$$U_z = \frac{V_z}{V} \quad (13g)$$

$$Q = \frac{q_z}{HV} \quad (13h)$$

Stąd równania (8a—d) i (10) przybierają postać:

$$\int_0^1 (\eta - \eta_x) \left[(\eta - \eta_z)^2 + \chi^2 (\eta - \eta_x)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = \frac{U_x}{\chi} \quad (14a)$$

$$\int_0^1 (\eta - \eta_z) \left[(\eta - \eta_z)^2 + \chi^2 (\eta - \eta_x)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = U_z \quad (14b)$$

$$\int_0^1 \eta(\eta - \eta_x) \left[(\eta - \eta_z)^2 + \chi^2 (\eta - \eta_x)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = \frac{U_x}{\chi} \quad (14c)$$

$$\int_0^1 \eta(\eta - \eta_z) \left[(\eta - \eta_z)^2 + \chi^2 (\eta - \eta_x)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = U_z - Q \quad (14d)$$

$$Q = (1 - \eta_x)U_z - (1 - \eta_z)\frac{U_x}{\chi} \quad (14e)$$

Równanie (14e) stanowi uzyskany wcześniej bezwymiarowy odpowiednik równania (14d). Jak wspomniano, układ równań (14a—c) i (14e) opisuje przepływ dwukierunkowy oraz — jako graniczny przypadek — przepływ jednokierunkowy, kiedy to zgodnie z równaniem (11) należy przyjąć:

$$U_x = 0 \text{ oraz } \chi = 0 \text{ lecz } U_x/\chi \neq 0 \quad (15)$$

Układ równań (14a—c) można w ogólnym przypadku jedynie częściowo scałkować otrzymując następujące rozwiązanie [11, 22]:

$$(\eta_z - \eta_x) \int_0^1 \left[(\eta - \eta_z)^2 + \chi^2 (\eta - \eta_x)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = \frac{U_x}{\chi} - U_z \quad (16a)$$

$$\frac{n}{n+1} \left[\left[(1 - \eta_z)^2 + \chi^2 (1 - \eta_x)^2 \right]^{\frac{n+1}{2n}} - \left[\eta_z^2 + \chi^2 \eta_x^2 \right]^{\frac{n+1}{2n}} \right] = U_z + \chi U_x \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \left[\eta_z^2 + \chi^2 \eta_x^2 \right]^{\frac{1+n}{2n}} &= \left[(1 - \eta_z) - \frac{2n+1}{n} (1 - \eta_x) \right] U_z + \\ &+ \left[\chi^2 (1 - \eta_x) + \frac{2n+1}{n} (1 - \eta_z) \right] \frac{U_x}{\chi} \end{aligned} \quad (16c)$$

Całkę w równaniu (16a) można obliczyć jedynie w odniesieniu do niektórych wartości stałej n .

Przepływ jednokierunkowy

W przypadku przepływu jednokierunkowego, uwzględniając warunek (15), wzór (16a) gdy $\chi = 0$ można jednak scałkować dla dowolnych wartości n oraz z podukładu równań (16a) i (16c) określić wartości η_x a także U_x/χ , względem których podukład ten jest liniowy. Po dłuższych, dość żmudnych obliczeniach i podstawieniu do równania (14e) otrzymuje się następujący wzór na natężenie przepływu jednokierunkowego:

$$Q = \frac{n}{2n+1} \left[(1 - \eta_z)U_z - |\eta_z|^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (17a)$$

Występujący w równaniu (17a) parametr η_z można wyznaczyć z równania (16b), które dla $\chi = 0$ ($U_x = 0$) przybiera postać:

$$\frac{n}{n+1} \left[|1 - \eta_z|^{\frac{n+1}{n}} - |\eta_z|^{\frac{n+1}{n}} \right] = U_z \quad (17b)$$

Wyrażenie (17a) można też oczywiście uzyskać w wyniku bezpośredniego scałkowania równania (14d)

dla $\chi = 0$, gdyż wraz z równaniem (14b) stanowi ono bezpośrednie sformułowanie problemu dla przepływu jednokierunkowego. Wzory (17a) i (17b) można też uzyskać jako szczególne przypadki dwuwymiarowego przepływu ciśnieniowo-włeczonego cieczy Ellisa lub cieczy potęgowej w szczelinie [23, 24]. Tego rodzaju przepływ, w którym równanie (14c) nie jest spełnione (istnieje bowiem przepływ „netto” w warunkach zerowego gradientu ciśnienia w kierunku x), jest opisany równaniami (14a, b, d), w których:

$$U_x \neq 0 \text{ oraz } \chi = 0 \text{ lecz } \eta_x \cdot \chi \neq 0 \quad (18)$$

Ponieważ przepływ taki występuje w szczelinie pierścieniowej pomiędzy współosiowymi cylindrami, z których jeden wykonuje ruch obrotowy przy istnieniu wzdłużnego gradientu ciśnienia, nie należy on do grupy typowych przepływów ślimakowych.

Dla dowolnych wartości wykładnika n parametr η_z można obliczyć z równania (17b) tylko metodami numerycznymi. Przybliżone obliczenia analityczne są możliwe jedynie w dwóch granicznych przypadkach, tj. kiedy przepływ ciśnieniowy dominuje nad przepływem włeczoną bądź też odwrotnie. Z definicji wielkości U_z danej wzorami (13e) i (13g) wynika, że jest ona określona stosunkiem dwóch prędkości, z których jedna (w liczniku) określa intensywność przepływu włeczonego, a druga (w mianowniku) — intensywność przepływu ciśnieniowego. Czystemu przepływowi włeczonemu odpowiada $U_z = \pm\infty$, natomiast czystemu przepływowi ciśnieniowemu $U_z = 0$. W tym ostatnim przypadku z równania (17b) wynika bezpośrednio wartość $\eta_z = 1/2$.

Stosując metodę szeregów potęgowych można obliczyć ze wzoru (17b) przybliżone wartości η_z dla małych bądź dużych wartości U_z (tj. małych wartości $1/U_z$). Po ich wprowadzeniu do wzoru (17a) (w którym wyraz $|\eta_z|^{(n+1)/n}$ należy także rozwinąć w szereg potęgowy w przypadku małych lub dużych U_z) można otrzymać dwa wyrażenia asymptotyczne, które po przejściu do zmiennych wymiarowych przybierają ostateczną postać:

— gdy przepływ ciśnieniowy dominuje nad przepływem włeczoną (mała wartość U_z)

$$q_z = \frac{1}{2} HV_z - \frac{nH^2}{2(2n+1)} \left(\left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \frac{H}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (18a)$$

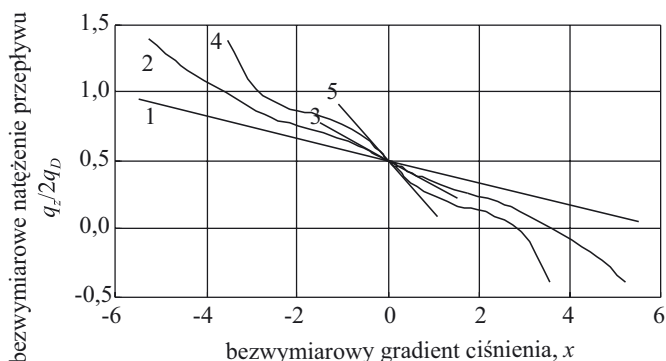
— gdy przepływ włeczony dominuje nad przepływem ciśnieniowym (duża wartość U_z)

$$q_z = \frac{1}{2} HV_z - \frac{n+1}{8n(2n+1)} \frac{H^3}{m} \left(\frac{V_z}{H} \right)^{1-n} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (18b)$$

Dla $n = 1$ oba wyrażenia, zgodnie z oczekiwaniem, redukują się do powszechnie znanego równania charakterystyki przepływu cieczy newtonowskiej. Jak wiadomo [10, 11, 14] charakterystyka takiego przepływu nie zależy ani od jego wymiarowości (gdyż przepływy wzdłużny i poprzeczny są niezależne), ani od względnej

intensywności przepływów ciśnieniowego i wlezonego.

Równanie (18a) stanowi prostą superpozycję przepływu ciśnieniowego i wlezonego cieczy potęgowej i jest dość często używane do modelowania przepływu. Wydaje się jednak, że zastosowanie tego równania nie może być w pełni uzasadnione w świetle przedstawionych powyżej wyników teoretycznych. W przypadku realnego przepływu cieczy w kanale ślimaka, przepływ wleczony ma charakter podstawowy, a przepływ ciśnieniowy jest jedynie jego konsekwencją. Dlatego też powinien on mieć istotne znaczenie jedynie w warunkach gwałtownych zmian przekroju kanału (np. w strefach ślimaka o dużym sprężaniu na małej długości). Wobec dominującej roli przepływu wlezonego w większości przepływów ślimakowych, wydaje się, że do adekwatnego opisu przepływu cieczy nienewtonowskich bardziej uzasadnione teoretycznie jest zastosowanie wzoru (18b). Ze wzoru tego wynika, że przepływ ciśnieniowy jest proporcjonalny do gradientu ciśnienia i zależy dodatkowo od intensywności (prędkości) przepływu wlezonego. Zachowanie takie było rzeczywiście obserwowane w doświadczeniach [14].



Rys. 2. Porównanie rozwiązania dokładnego [wg równań (17a) i (17b)] oraz przybliżonego [wg równania (18b)] dla różnych wartości n w przypadku przepływu jednokierunkowego cieczy potęgowej: 1 — $n = 1$ (ciecz newtonowska), 2 — $n = 0,5$ (rozwiązanie dokładne), 3 — $n = 0,5$ (rozwiązanie przybliżone), 4 — $n = 0,25$ (rozwiązanie dokładne), 5 — $n = 0,25$ (rozwiązanie przybliżone)

Fig. 2. Comparison of the solutions: exact one [according to equation (17a) and (17b)] and approximate one [according to equation (18b)], for various n values, for unidirectional flow of power law liquid: 1 — $n = 1$ (Newtonian liquid), 2 — $n = 0.5$ (exact solution), 3 — $n = 0.5$ (approximate solution), 4 — $n = 0.25$ (exact solution), 5 — $n = 0.25$ (approximate solution)

Rysunek 2 ilustruje porównanie dokładnej charakterystyki przepływu wg równań (17a) i (17b) z charakterystyką przybliżoną wg równania (18b), przy czym, dla porównania, charakterystyki te przedstawiono w jednolitym zapisie jako zależność względnego natężenia przepływu od bezwymiarowego gradientu ciśnienia:

$$\frac{q_z}{2q_D} = \frac{n}{2n+1} \left[(1-\eta_z) - |\eta_z|^{\frac{1+n}{n}} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn} x \right] \quad (19)$$

$$\frac{n}{n+1} \left(|1-\eta_z|^{\frac{1+n}{n}} - |\eta_z|^{\frac{1+n}{n}} \right) = |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn} x \quad (19a)$$

$$\frac{q_z}{2q_D} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{8n(2n+1)} x \quad (20)$$

gdzie: q_D — natężenie przepływu wlezonego, x — bezwymiarowy gradient ciśnienia.

Wartość q_D jest określona wyrażeniem:

$$q_D = \frac{1}{2} HV_z \quad (21a)$$

a wartość x równaniem:

$$x = \left| \frac{V}{V_z} \right|^n \operatorname{sgn} V = |U_z|^{-n} \operatorname{sgn} U_z \quad (21b)$$

Z rysunku 2 wynikają, jak można było zresztą oczekiwać, widoczne rozbieżności pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (krzywe 2 i 3 oraz 4 i 5) występujące w obszarze większych wartości parametru x , tzn. dużej względnej intensywności przepływu ciśnieniowego. Potwierdza to poprzednie stwierdzenie, że bardzo proste równanie (20) bądź jego wymiarowy odpowiednik (18b), które umożliwiają łatwe obliczanie wartości gradientu ciśnienia przy znanym natężeniu przepływu, można stosować, praktycznie biorąc, w całym najbardziej istotnym zakresie zmian względnej intensywności przepływu ciśnieniowego i wlezonego. Dotyczy to także obliczeń charakterystyk przepływu w kanale o skończonej szerokości, jeśli zastosuje się koncepcję tzw. efektywnego gradientu ciśnienia i efektywnej prędkości ściany [22, 25]. Polega ona na zastąpieniu wielkości V_z i $\partial P/\partial z$ występujących bezpośrednio lub pośrednio we wzorze (21b), przy czym $\partial P/\partial z$ i V wiąże równanie (13e), wielkościami efektywnymi określonymi jako:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{ef} = \frac{\partial P}{\partial z} F_P \quad (22a)$$

$$(V_z)_{ef} = V_z F_D \quad (22b)$$

gdzie: F_P i F_D — współczynniki kształtu w przypadku przepływu, odpowiednio, ciśnieniowego i wlezonego cieczy newtonowskiej w kanale o skończonej szerokości (porównywalnej z wysokością) [9–11, 14], uwzględniające hamujący wpływ ścian bocznych na obydwa wspomniane typy przepływu.

Wielkości efektywne w kierunku z równoległym do osi kanału można także stosować we wszystkich innych wzorach podanych wcześniej. Należy też dodać, że współczynniki kształtu w kierunku x prostopadłym do osi kanału są równe jedności, gdyż szerokość kanału w tym kierunku jest równa w rzeczywistości jego długości, która z założenia jest bardzo duża. Przy użyciu wielkości efektywnych wszystkie wyrażenia uzyskane dla $n = 1$ opisują przepływ cieczy newtonowskiej w ka-

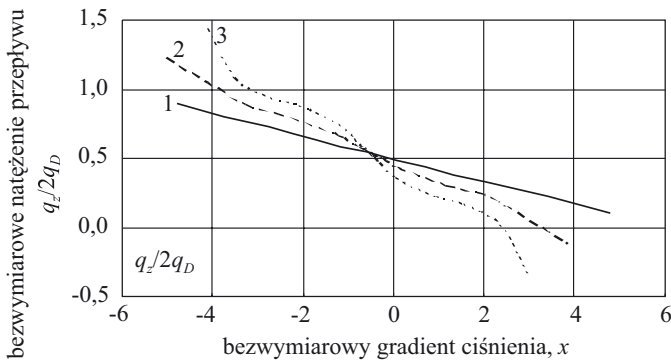
nale o skończonej szerokości. Stosując wielkości efektywne można także uwzględnić wpływ innych czynników, np. krzywizny kanału lub przepływu przeciekowego, dzięki wprowadzeniu dalszych współczynników korekcyjnych obliczanych tak jak dla cieczy newtonowskiej [14].

Z rysunku 2 wynika też, że w odniesieniu do przepływu jednokierunkowego krzywe odpowiadające różnym wartościom n przecinają się w punkcie o współrzędnych $x = 0$ (zerowy gradient ciśnienia) oraz $q_z/2q_D = 1/2$ (przepływ całkowity równy przepływowi wleczonemu).

Przepływ dwukierunkowy

Numeryczne obliczenia charakterystyki przepływu dwukierunkowego opisanego wzorami (14e) oraz (16a—c), wskazują także na istnienie wspólnego punktu przecięcia krzywych dla różnych wartości n , któremu jednak odpowiada pewna wartość $x < 0$ [21, 22]. Stąd dla $x = 0$ ciecziom pseudoplastycznym odpowiada wartość $q_z/2q_D < 1/2$, natomiast cieczy newtonowskiej ($n = 1$) — wartość $q_z/2q_D = 1/2$.

Przykład charakterystyki przepływu dwukierunkowego w przypadku typowego ślimaka o skoku zwoju równym średnicy ($\varphi = 17,7^\circ$) przedstawia rys. 3. Należy dodać, że ze wzrostem kąta wzniosu linii śrubowej φ



Rys. 3. Charakterystyka przepływu dwukierunkowego cieczy potęgowej w przypadku ślimaka o skoku zwoju równym średnicy ($\varphi = 17,7^\circ$): 1 — $n = 1$, 2 — $n = 0,5$, 3 — $n = 0,25$

Fig. 3. Characteristics of two-directional flow of power law liquid in a case of square-pith screw ($\varphi = 17,7^\circ$): 1 — $n = 1$, 2 — $n = 0.5$, 3 — $n = 0.25$

wspólny punkt przecięcia krzywych dla różnych wartości n przesuwają się wzdłuż odnośnej się do cieczy newtonowskiej prostej $n = 1$ w kierunku coraz mniejszych wartości x . Dla $\varphi = 0$, tj. przepływu jednokierunkowego, krzywe przecinają się w punkcie $x = 0$, co przedstawia rys. 2.

Poniżej zostanie przedstawione przybliżone rozwiązanie dotyczące przepływu dwukierunkowego dla istot-

niejszego w praktyce przypadku małych wartości U_z , tzn. kiedy przepływ wleczony dominuje nad przepływem ciśnieniowym. Sprowadza się ono do wyznaczenia wartości parametrów η_x , η_z i U_x/χ , występujących we wzorze (14e). Pierwsze przybliżenie odnoszące się do tych parametrów można otrzymać zastępując człon potęgowy w całkach (14a—c) wartością średnią obliczoną dla środka przedziału całkowania, tj. dla $\eta = 1/2$. Wykonując całkowanie tak jak dla cieczy newtonowskiej otrzymuje się:

$$\eta_x = \frac{1}{2} - \frac{U_x}{\chi \left(U_x^2 + U_z^2 \right)^{\frac{1-n}{2}}} \quad (23a)$$

$$\eta_z = \frac{1}{2} - \frac{U_z}{\left(U_x^2 + U_z^2 \right)^{\frac{1-n}{2}}} \quad (23b)$$

$$\frac{U_x}{\chi} = \frac{1}{6} \left(U_x^2 + U_z^2 \right)^{\frac{1-n}{2}} \quad (23c)$$

We wzorach (23a—c) uwzględniano dodatkową zależność wynikającą z zastosowanej metody przybliżonego rozwiązania układu (14a—c):

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} - \eta_z \right)^2 + \chi^2 \left(\frac{1}{2} - \eta_x \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} d\eta = \left(U_x^2 + U_z^2 \right)^{\frac{1-n}{2}} \quad (24)$$

Podstawiając (23c) do (23a) otrzymuje się także $\eta_x = 1/3$. Dla $n = 1$ równania (23a—c) stanowią dokładne rozwiązanie dotyczące cieczy newtonowskiej.

Uwzględniając zależności (13h) i (21a), równanie (14e) można zapisać w następującej, dogodniejszej do dalszych obliczeń postaci:

$$\frac{q_z}{2q_D} = (1 - \eta_x) - (1 - \eta_z) \frac{U_x}{\chi} U_z^{-1} \quad (25)$$

Dla $n \neq 1$ wartości η_x oraz U_x/χ obliczone ze wzorów (23a) i (23c) są jednak zbyt mało dokładne, aby uzyskać dobrą zgodność wartości wynikających ze wzoru (25) z obliczeniami numerycznymi. Dostatecznie dokładną wartość U_x/χ można obliczyć z równania (16c), w którym wcześniej w miejsce stałych η_x , η_z i χ należy podstawić odpowiednie dane z równań (23a—c). Równanie (16c) umożliwi również obliczenie nowej, dokładniejszej wartości η_x , przy czym do obliczeń niezbędne są wartości U_x/χ i $U_x \cdot \chi$. Wartość U_x/χ należy wyznaczyć z równania (16a) wyrażając całkę przybliżonym równaniem (24), natomiast wartość $U_x \cdot \chi$ wyznacza się z równania (16b).

Uwzględniając dodatkowo oczywistą równość wynikającą ze wzorów (3a), (3b), (13f) i (13g):

$$U_x = U_z \tan \varphi \quad (25a)$$

oraz wprowadzając oznaczenie

$$a = \left(1 + \tan^2 \varphi \right)^{\frac{1-n}{2}} \quad (25b)$$

równanie (25) po dłuższych przekształceniach można zapisać w postaci:

$$\frac{q_z}{2q_D} = A - 2 \left(\frac{1}{2} ax + 1 \right) B \quad (26)$$

gdzie

$$A = \frac{a \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} ax - 1 \right)^2 + 4 \tan^2 \varphi \right] a^{-2} \right\}^{\frac{1+n}{2n}} + \left(\frac{2n+1}{2n} ax - 1 \right) \left(\frac{1}{2} ax + 1 \right)}{6 \tan^2 \varphi + \frac{2n+1}{2n} a^2 x^2} \quad (26a)$$

oraz

$$B = \frac{a \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} ax - 1 \right)^2 + 4 \tan^2 \varphi \right] a^{-2} \right\}^{\frac{1+n}{2n}} + \frac{n+1}{2n} ax - \left(1 + \tan^2 \varphi \right)}{36 \tan^2 \varphi + \frac{2n+1}{n} a^2 x^2} \quad (26b)$$

gdzie: x — zmienna (bezwymiarowy gradient ciśnienia) zdefiniowana równaniem (21b).

Ponadto widać, że natężenie przepływu dwukierunkowego jest jednoznacznie funkcją $\tan^2 \varphi$, tzn. zależy od kąta wzniosu linii śrubowej ślimaka. W przypadku przepływu jednokierunkowego należy przyjąć $\tan^2 \varphi = 0$. Wówczas w obszarze małych wartości x (zaniedbując wyrazy stopnia wyższego niż drugi) równanie (26) redukuje się do postaci (20). Dla $n = 1$ wzór (26) przybiera zgodnie z oczekiwaniem postać równania przepływu cieczy newtonowskiej także gdy $\tan^2 \varphi \neq 0$.

Z prostego porównania zależności (26) i (20) wynika, że przybliżony opis przepływu dwukierunkowego jest o wiele bardziej złożony niż przepływu jednokierunkowego. Przepływ poprzeczny, ogólnie biorąc, zmniejsza natężenie przepływu wzdłużnego cieczy nienewtonowskiej. W przypadku typowego kąta wzniosu linii śrubowej $\varphi = 17,7^\circ$ i typowych dla wielu polimerów wartości wykładnika potęgowego $n = 0,4$ – $0,6$ zmniejszenie to, którego miarą może być np. położenie punktu przecięcia krzywej dla danej wartości wykładnika n z prostą $x = 0$, jest stosunkowo niewielkie. Wskazują na to zarówno wyniki obliczeń uwidocznione na rys. 3, jak i obliczenia wykonane w pracy [21] dotyczące jeszcze innych wartości wykładnika równania potęgowego n . Przyjmując we wzorze (27) $x = 0$ otrzymuje się, na przykład, dla $n = 0,5$ i ślimaka o skoku zwoju równym średnicy ($\varphi = 17,7^\circ$) zbliżoną do dokładnych obliczeń numerycznych wartość $q/2q_D = 0,454$ zamiast $0,5$. Oznacza to, że w typowych warunkach przepływ poprzeczny jedynie nieznacznie wpływa na charakterystykę głównego przepływu wzdłużnego. Dlatego też — wobec sporej komplikacji nawet przybliżonych wzorów opisujących przepływ dwukierunkowy — do praktycznych obliczeń inżynierskich można stosować o wiele prostsze, słuszne w przypadku przepływu jednokierunkowego zależności, np. bardzo proste wzory (19a, b).

PODSUMOWANIE

Przedstawiona analiza teoretyczna jedno- i dwukierunkowych przepływów uogólnionych cieczy newto-

nowskich w kanale ślimaka wykazała, że natężenie przepływu można opisać prostym wzorem ogólnym, słusznym dla dowolnej cieczy z tej klasy, niezależnie od wymiarowości przepływu. Wykorzystanie tego wzoru do obliczania charakterystyki przepływu wymaga jednak wyznaczenia odpowiednich parametrów, które zależą od równania konstytutywnego i wymiarowości przepływu. Do ścisłego ich wyznaczenia należy stosować metody numeryczne. Z tego względu w odniesieniu do najważniejszego w praktyce równania potęgowe opisano efektywne przybliżone metody obliczania parametrów równania w przypadku natężenia przepływu zarówno jedno-, jak i dwukierunkowego. Uzyskane wzory, które w odniesieniu do przepływu jednokierunkowego są bardzo proste, umożliwiają łatwe obliczanie charakterystyk przepływu w szerokim zakresie zmian jego parametrów. Na drodze wprowadzenia odpowiednio zdefiniowanych wartości efektywnej prędkości i gradientu ciśnienia można w obliczeniach charakterystyk uwzględnić dodatkowo wpływ takich czynników jak skończona szerokość kanału, jego krzywizna lub przepływ przeciekowy. Korzystając z bardzo dobrego przybliżenia udowodnionego przez Tornera [1] otrzymane wyniki słuszne w przypadku warunków izotermicznych można bezpośrednio wykorzystać do analizy przepływów nieizotermicznych, np. adiabatycznego bądź ze ślimakiem chłodzonym lub niechłodzonym. Można przy tym rozpręgnąć równanie ruchu i energii stosując zmodyfikowaną metodę Basowa i Kazankowa [26]. Efektywność opisanego sposobu analizy przepływów nieizotermicznych potwierdzają wyniki obliczeń prezentowane w innych pracach autora [21, 22, 25].

LITERATURA

1. Torner R.V.: „Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov”, wyd. Khimija, Moskwa 1977.
2. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O.: „Dynamics of polymeric liquids”, Wiley, New York 1987.
3. White J. L.: „Principles of polymer engineering rheology”, Wiley, New York 1990.
4. Michaeli W.: „Extrusion dies for plastics and rubbers”, Hanser, New York 1992.
5. Vlachopoulos J.: „Polymer rheology and extrusion”, McMaster University, Hamilton 1994.
6. Shenoy U. V.: w pracy zbiorowej „Handbook of applied polymer processing technology” (red. Cheremisinoff N. P., Cheremisinoff P. N.), Marcel Dekker, New York 1996.
7. Carreau P. J., DeKee D. C. R., Chhabra R. P.: „Rheology of polymeric systems”, Hanser, New York 1997.
8. Rauwendaal Ch.: „Polymer extrusion”, Hanser, New York 2001.
9. Wilczyński K.: „Teoria wytłaczania jednoślindakowego tworzyw wielkocząsteczkowych”, WPW, Warszawa 1989.
10. Sikora R.: „Przetwórstwo tworzyw wielkocząsteczkowych”, Wyd. Żak, Lublin 1994.

11. Wilczyński K.: „Reologia w przetwórstwie tworzyw sztucznych”, WNT, Warszawa 2001.
12. Wilczyński K., White J. L.: *Polimery* 2008, **53**, 754.
13. Steller R., Iwko J.: *Polimery* 2008, **53**, 836.
14. Tadmor Z., Klein I.: „Engineering principles of plasticating extrusion”, Van Nostrand, New York 1970.
15. Pittman J. T. F.: w pracy zbiorowej „Development in plastics technology - 3” (red. Whelan A., Craft J. L.), Appl. Sci. Publ., London 1986.
16. Sikora R., Sasimowski E.: *Intern. Polym. Proc.* 2000, **15**, 221.
17. Sikora R., Sasimowski E.: *Intern. Polym. Proc.* 2003, **18**, 235.
18. Sikora R., Sasimowski E.: *Polimery* 2001, **46**, 184.
19. Sikora R., Sasimowski E.: *Polimery* 2002, **47**, 117.
20. Griffith R. M.: *I. & E. C. Fundam.* 1962, **1**, 180.
21. Steller R.: *Polym. Eng. Sci.* 1990, **30**, 400.
22. Steller R., Iwko J.: *Intern. Polym. Proc.* 2001, **15**, 241.
23. Steller R.: *Plaste Kautschuk* 1989, **36**, 26.
24. Steller R.: *Polym. Eng. Sci.* 2001, **41**, 1859.
25. Steller R., Iwko J.: *Intern. Polym. Proc.* 2001, **15**, 249.
26. Basov N. I., Kazankov Yu. V.: „Litiewoe formowanie polimerov”, wyd. Khimija, Moskwa 1985.

Otrzymano 12 II 2008 r.